

تناه‌ی، نامتناه‌ی شمارا و نامشمارا

حمیدرضا امیری

به کار ببریم، به سادگی و به صورت زیر می توان نشان داد که مجموعه عددهای طبیعی و مجموعه عددهای طبیعی زوج تناظر یک به یک دارند؛ یعنی: $N \approx 2N$

N:	۱	۲	۳	۴	۵	۶
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲

(کمی جلوتر همین تناظر یک به یک بین مجموعه‌های نامتناهی را به صورتی دقیق تر و با تعریف تابعی دوسویی، یعنی تابعی یک به یک و پوشا بین دو مجموعه، نشان خواهیم داد). حال به سراغ بحث اصلی می رویم و با تعریف مجموعه‌های متناهی و نامتناهی آغاز می کنیم.

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

تعداد حرف‌های صدادار انگلیسی از تعداد حرف‌های انگلیسی کمتر است. زیرا مجموعه اول جزو مجموعه دوم است. آیا این اصل در مورد مجموعه‌هایی چون N و زیرمجموعه‌های آن نیز صادق است؟ آیا می توان گفت تعداد اعضای مجموعه عددهای طبیعی و زوج، از تعداد اعضای N کمتر است؟ برای پاسخ به این سؤال باید مفاهیم متناهی و نامتناهی را در مجموعه‌ها بررسی کنیم و برای آن تعریفی جامع و مانع ارائه دهیم.

قبل از بررسی دو مفهوم متناهی و نامتناهی، به دلیل وابستگی این دو مفهوم به مفهوم «تعداد اعضا»، ابتدا مفهوم تعداد اعضا را بررسی می کنیم.

در مورد مجموعه‌هایی مانند مجموعه دانش آموزان و مجموعه صندلی‌ها، راه مستقیمی که برای مقایسه تعداد اعضای این دو

وقتی صحبت از مجموعه‌های متناهی و در مقابل آن‌ها، مجموعه‌های نامتناهی می شود، مجموعه‌هایی چون مجموعه عددهای اول یک رقمی یا مجموعه عددهای فرد دو رقمی را می توان به عنوان مجموعه‌های متناهی، و مجموعه‌هایی مانند مجموعه عددهای طبیعی (N) یا مجموعه عددهای حقیقی (R) را می توان به عنوان مجموعه‌های نامتناهی در نظر گرفت. حال این سؤال پیش می آید که: آیا مجموعه‌های نامتناهی مانند N و R در یک گروه محسوب می شوند؟

در این مقاله می کوشیم، علاوه بر معرفی مجموعه‌های متناهی و نامتناهی، مجموعه‌های نامتناهی را به دو دسته نامتناهی شمارا و نامتناهی ناشمارا تقسیم و با مثال‌هایی، تفاوت این دو گروه از مجموعه‌های نامتناهی را مشخص کنیم.

قبل از هر چیز به تعریف مفهوم تناظر یک به یک نیاز داریم که این مفهوم را به این صورت بیان می کنیم:

تناظر یک به یک: اگر A و B دو مجموعه باشند و به ازای هر عضو از A یک عضو از B و به ازای هر عضو از B یک عضو از A وجود داشته باشد، می گوییم A و B تناظر یک به یک دارند و می نویسیم: $A \approx B$.

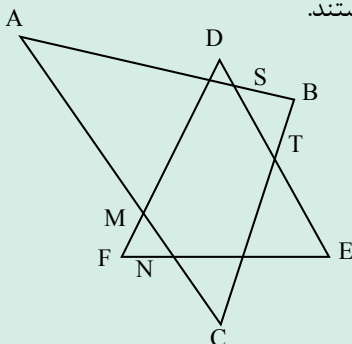
برای مثال، اگر فرض کنیم: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ ، در این صورت واضح است که: $A = B$. این تناظر یک به یک را به شکل زیر ملاحظه می کنید:

A:	۱	۲	۳	۴	۵	۶
	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	a	b	c	d	e	f

همان طور که در تعریف دقت کردید، مفهوم تناظر یک به یک بین دو مجموعه A و B هیچ محدودیتی برای نامتناهی بودن این دو مجموعه ایجاد نمی کند و اگر این مفهوم را به دقت

با یکدیگر هم عدد خواهند بود.

مسئله ۱. ثابت کنید مجموعه نقاط پاره خط AC و DE با یکدیگر هم عدد هستند.



اثبات. تناظری یک به یک بین مجموعه نقاط دو پاره خط AC و ST وجود دارد. پس AC با زیرمجموعه‌ای از DE هم عدد است و نیز بین مجموعه نقاط DE و MN تناظر یک به یک وجود دارد. پس DE با زیرمجموعه‌ای از AC هم عدد است. پس بنا بر قضیه هم‌ارزی، AC و DE هم عددند.

تعریف ۳. به ازای عدد طبیعی K، مجموعه عددهای طبیعی کوچک‌تر یا مساوی با K را قطعه K از عددهای طبیعی می‌نامیم و با N_K نشان می‌دهیم:

مثال.

$$N_K = \{1, 2, 3, \dots, K\}$$

$$N_8 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ و } N_4 = \{1, 2, 3, 4\}$$

تعریف ۴. مجموعه A را متناهی می‌نامیم، هر گاه تهی باشد یا با قطعه‌ای مانند N_K از عددهای طبیعی هم عدد باشد. اگر $A = \emptyset$ باشد، می‌گوییم تعداد اعضای A صفر است و اگر $A \approx N_K$ باشد، تعدادی اعضای A را (که عددی منحصر به فرد است) K می‌نامیم و می‌نویسیم: $n(A) = K$.

درواقع وقتی: $A \approx N_K$ ، بنا بر مطالب گفته شده، بین N_K و A تناظری یک به یک برقرار می‌شود و این به نوعی شمارش اعضای A توسط N_K محسوب می‌شود.

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$$

$$N_K = \{1, 2, 3, \dots, K\}$$

$$f = \{(1, a_1), (2, a_2), \dots, (k, a_k)\}$$

مجموعه‌های متناهی ویژگی‌هایی دارند که آن‌ها را از مجموعه‌های نامتناهی جدا می‌کنند. مهم‌ترین آن‌ها عبارت‌اند از:

قضیه ۳. هر زیرمجموعه یک مجموعه متناهی، متناهی است و اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد و: $B \subseteq A$ ، آن‌گاه: $0 \leq n(B) \leq n(A)$

مجموعه وجود دارد، شمارش تعداد اعضای هر مجموعه و مقایسه عددهای حاصل است.

اما آیا از این طریق می‌توان تعداد نقاط دو قطعه خط یا تعداد عددهای طبیعی و عددهای طبیعی زوج را با هم مقایسه کرد؟ برای رهایی از این مشکل، استفاده از «روش کانتور» بهترین راه حل است و آن برقراری تناظر یک به یک بین دو مجموعه است. اگر مجموعه A را مجموعه دانش‌آموزان خارج از کلاس و مجموعه B را مجموعه صندلی‌های داخل کلاس تصور کنیم و بخواهیم بین A و B تناظری یک به یک برقرار سازیم، سه حالت ممکن است رخ بدهد:

۱. حالتی که هیچ دانش‌آموزی خارج از کلاس نمانده باشد و هیچ صندلی خالی نیز در کلاس نباشد. در این حالت، بین دو مجموعه A و B تناظری یک به یک برقرار شده است که می‌گوییم تعداد اعضای A و B با هم برابرند (A و B هم عدد هستند).

۲. حالتی که همه صندلی‌ها اشغال شده باشند و تعدادی دانش‌آموز در خارج کلاس باقی مانده باشند. در اینجا تعداد اعضای A بیشتر از تعداد صندلی‌ها بوده است. در این حالت، B با زیرمجموعه‌ای از A هم عدد شده است و نیز A با هیچ زیرمجموعه‌ای از B هم عدد نیست.

۳. حالتی که همه دانش‌آموزان روی صندلی نشسته باشند، ولی بعضی از صندلی‌ها خالی مانده باشند. در این حالت می‌توان گفت: تعداد اعضای B بیشتر از تعداد اعضای A است.

حال می‌توان با استمداد از مفهوم تناظر یک به یک، مقایسه بین تعداد اعضای دو مجموعه مانند A و B را مستقل از مفهوم عدد به صورت این تعریف‌ها تعمیم داد:

تعریف ۱. دو مجموعه A و B را هم عدد می‌گوییم و می‌نویسیم: $A \approx B$ ، هر گاه تناظری یک به یک بین A و B برقرار باشد.

تعریف ۲. اگر مجموعه A با زیرمجموعه‌ای از B هم عدد باشد، ولی B با هیچ زیرمجموعه‌ای از A هم عدد نباشد، می‌گوییم A ضعیف‌تر از B است و می‌نویسیم: $A < B$.

قضیه ۱. رابطه هم‌عددی در مجموعه مجموعه‌ها یک رابطه هم‌ارزی است.

- I) $A \approx A$
- II) $A \approx B \Rightarrow B \approx A$
- III) $A \approx B \text{ و } B \approx C \Rightarrow A \approx C$

قضیه ۲ را که به قضیه «کانتور و برنشتاین» یا قضیه «هم‌ارزی» معروف است، می‌پذیریم.

قضیه ۲. اگر مجموعه A با زیرمجموعه‌ای از B و نیز مجموعه B با زیرمجموعه‌ای از A هم عدد باشند، آن‌گاه دو مجموعه A و B

قضیه ۴. هیچ مجموعه متناهی نمی تواند با یک زیرمجموعه محض خود (زیرمجموعه محض یا سره A مجموعه ای است چون $B \subset A$ و $B \neq A$) هم عدد باشد.

قضیه ۵. اگر A و B مجموعه هایی متناهی باشند، در این صورت:

$$(I) \quad (A \cup B) \text{ و } (A \cap B) \text{ و } (A - B) \text{ متناهی هستند.}$$

$$(II) \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$(III) \quad n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

حال این موضوع پیش می آید که مجموعه ای چون N با هیچ قطعه ای از N، یعنی با هیچ قطعه ای از خودش هم عدد نیست. پس متناهی نیست. به چنین مجموعه هایی چه می توان گفت؟ درست است این مجموعه ها که متناهی نیستند، نامتناهی نامیده می شوند، یعنی در حالت کلی:

تعریف ۵. مجموعه A را نامتناهی می نامیم، هر گاه متناهی نباشد. به عبارت دیگر، مجموعه A نامتناهی است، هر گاه تهی نباشد و با هیچ قطعه ای از عددهای طبیعی هم عدد نباشد. مجموعه های نامتناهی نیز ویژگی های خاص خود را دارند که مهم ترین آن ها عبارتند از:

قضیه ۶. هر مجموعه که زیرمجموعه ای نامتناهی داشته باشد، نامتناهی است.

قضیه ۷. هر مجموعه که با یک زیرمجموعه حقیقی خود هم عدد باشد، نامتناهی است.

قضیه ۸. مجموعه عددهای طبیعی نامتناهی است (کاربرد قضیه ۷، زیرا N با $2N$ تناظر یک به یک دارد).

$$\begin{array}{ccccccc} N: & 1 & 2 & 3 & \dots & n & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ & 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & \end{array} \quad \begin{array}{l} f: N \rightarrow 2N \\ f(n) = 2n \text{ (تابعی دوسویی است)} \end{array}$$

قضیه ۹. هر مجموعه که با یک مجموعه نامتناهی هم عدد باشد، نامتناهی است.
نتیجه: Z نامتناهی است.

$$f: N \rightarrow Z \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{زوج } n \\ \frac{1-n}{2} & \text{فرد } n \end{cases}$$

(f تناظری یک به یک یا تابعی دوسویی است).

سرانجام به بحث بسیار مهم و شاید تا حدی چالش برانگیز می رسیم به نام مفهوم شمارایی و ناشمارایی! چه مجموعه هایی شمارا یا شمارش پذیرند؟ آیا مفهوم

شمارش پذیری و مفهوم متناهی در مجموعه ها معادل یکدیگرند؟ برای پاسخ به این سؤال ها باید تعریف مجموعه های شمارا و ناشمارا به درستی تبیین شود.

تعریف ۶. مجموعه A را شمارا یا شمارش پذیر می نامیم، هر گاه با N هم عدد باشد و اگر مجموعه ای متناهی یا شمارا باشد، آن را حداکثر شمارا می نامیم.

با توجه به تعریف ۶ می توان گفت:

۱. مجموعه های شمارا نامتناهی هستند (زیرا با N هم عدد هستند).

۲. هر مجموعه متناهی حداکثر شماراست.

۳. اعضای مجموعه های شمارا را می توان توسط N برچسب گذاری کرد. در واقع N مجموعه ای برچسب گذار است، همان طور که اگر A مجموعه ای متناهی باشد و: $n(A) = K$ ، مجموعه A را می توان توسط N_K برچسب گذاری کرد.

۴. مجموعه های شمارا دو به دو هم عدد هستند.

۵. هر یک از مجموعه های N و $2N$ (عددهای طبیعی زوج) و $2N+1$ ، Z و W شمارا هستند.

۶. مجموعه $N \times N$ شماراست.

$$f: N \times N \rightarrow N$$

$$f(m, n) = 2^{m-1}(2n-1)$$

(به عنوان تمرین ثابت کنید این تابع دوسویی است).

۷. مجموعه Z (عددهای صحیح) شماراست.

(ثابت می شود که f تابعی دوسویی است و

$$f: N \rightarrow Z$$

$$f(n) = \left[\frac{n}{2} \right] \times (-1)^n$$

همان طور که مشاهده می کنید، عددهای صحیح و مثبت توسط تأثیر f روی عددهای طبیعی زوج و بقیه توسط عددهای طبیعی فرد تولید می شوند).

$$f(1) = 0 \times (-1)^1 = 0, \quad f(2) = 1 \times (-1)^2 = 1$$

$$f(3) = 1 \times (-1)^3 = -1, \quad f(4) = 2 \times (-1)^4 = 2$$

$$f(5) = 2 \times (-1)^5 = -2, \quad f(6) = 3 \times (-1)^6 = 3$$

$$f(2n+1) = \left[\frac{2n+1}{2} \right] \times (-1)^{2n+1} = n + \left[\frac{1}{2} \right] \times (-1)^{2n+1} = -n$$

$$f(2n) = \left[\frac{2n}{2} \right] \times (-1)^{2n} = n \times (-1)^{2n} = n$$

قضیه های مربوط به مجموعه های شمارا

قضیه ۱۰. هر مجموعه نامتناهی، زیرمجموعه ای شمارا دارد.

اثبات: فرض کنیم A مجموعه ای نامتناهی باشد. عضو

دلخواهی از A انتخاب می‌کنیم و آن را a_1 می‌نامیم. چون A نامتناهی است، پس $A - \{a_1\}$ تهی نیست. عضو دلخواهی از $A - \{a_1\}$ انتخاب می‌کنیم و آن را a_2 می‌نامیم. پس: $a_1 \neq a_2$. به همین ترتیب، به ازای عدد طبیعی n اعضای a_1, a_2, \dots و a_n را به طریق فوق که همگی دو به دو متمایز هستند، انتخاب می‌کنیم و از مجموعه $A - \{a_1, \dots, a_n\}$ نیز عضو دلخواه a_{n+1} را. در نهایت مجموعه $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ را که مجموعه‌ای شمارا و زیرمجموعه A است، می‌سازیم.

قضیه ۱۱. هر زیرمجموعه یک مجموعه شمارا، حداکثر شماراست.

اثبات: فرض کنیم A مجموعه‌ای شمارا باشد و: $E \subseteq A$ ، اگر E متناهی باشد که حکم ثابت است، و اگر E متناهی نباشد، بنابر قضیه قبل، زیرمجموعه‌ای شمارا چون E_1 دارد و چون A شماراست، پس: $E_1 \approx A$. از طرف دیگر داریم: $E \subseteq A$ و $E \approx E$. پس A زیرمجموعه‌ای هم‌عدد با E و E نیز زیرمجموعه‌ای هم‌عدد با A دارد. پس بنابر قضیه هم‌ارزی داریم: $E \approx A$ و بنابراین E شماراست.

قضیه ۱۲. اگر A مجموعه‌ای شمارا و B مجموعه‌ای حداکثر شمارا و ناتهی باشد، مجموعه $A \times B$ شماراست.

$$\left. \begin{array}{l} \text{شمارا } A \Rightarrow A \approx \mathbb{N} \\ \text{شمارا } B \Rightarrow B \approx \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow A \times B \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N} \Rightarrow A \times B \text{ شماراست}$$

در اثبات فوق، از قضیه ۱۳ که آن را بدون اثبات می‌پذیریم، استفاده شده است:

$$\begin{array}{l} A \approx B \\ C \approx D \end{array} \Rightarrow A \times C \approx B \times D$$

قضیه ۱۳. اگر E مجموعه‌ای ناشمارا باشد و A زیرمجموعه‌ای حداکثر شمارا را از E باشد، آن‌گاه: $E - A \approx E$.

قضیه ۱۴. هر مجموعه نامتناهی حداقل با یک زیرمجموعه حقیقی خود هم‌عدد است. اگر A نامتناهی باشد و B زیرمجموعه‌ای متناهی و ناتهی از A باشد، واضح است که $(A - B)$ یک زیرمجموعه حقیقی A است و بنابر قضیه ۱۳ داریم: $A - B \approx A$.

شاید جالب‌ترین نتیجه‌ای که بتوان از مطالب گفته شده گرفت، شمارش‌پذیر بودن مجموعه عددهای گویا، یعنی \mathbb{Q} باشد که اگر فرض کنیم:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

واضح است که با فرض $(m, n) = 1$ (m, n نسبت به هم اول باشند)، هر $\frac{m}{n}$ را به شکل منحصر به فردی می‌توان به صورت زوج مرتب (m, n) نمایش داد. در این حالت و با توجه به تعریف ضرب دکارتی می‌توان نوشت:

$$\{(m, n) \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$$

بنابراین ملاحظه می‌کنید که: $\mathbb{Q} \approx \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ و چون (قبلاً ثابت شد که $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ شماراست، $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ شماراست، پس \mathbb{Q} نیز شماراست و نیز می‌توان نتیجه گرفت که $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})$ ، یعنی مجموعه عددهای گنگ، مجموعه‌ای ناشماراست.

قضیه ۱۵. مجموعه همه عددهای گویا شماراست.
اثبات: دنباله‌ای از عددهای گویا را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{array}{cccc} \frac{0}{1}, & \frac{-1}{1}, & \frac{0}{2}, & \frac{1}{1}, & \frac{-2}{1}, & \frac{-1}{2}, & \frac{0}{3}, & \frac{1}{2}, & \frac{2}{1} \\ \frac{-3}{1}, & \frac{-2}{2}, & \frac{-1}{3}, & \frac{0}{4}, & \frac{1}{3}, & \frac{2}{2}, & \frac{3}{1}, & \frac{-4}{1}, & \frac{-3}{2} \\ \frac{-2}{3}, & \frac{-1}{4}, & \frac{0}{5}, & \frac{1}{4}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{2}, & \frac{4}{1}, & \frac{-5}{1}, & \frac{-4}{2}, \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{-3}{1} & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{3} & \frac{-3}{4} \\ \frac{-2}{1} & \frac{-2}{2} & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{4} \\ \frac{-1}{1} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{4} \\ \frac{0}{1} & \frac{0}{2} & \frac{0}{3} & \frac{0}{4} \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

هر کسر $\frac{p}{q}$ ، که p و q عددهای صحیح باشند و داشته باشیم: $q > 0$ ، نمایش یک عدد گویاست. اگر در فهرست بالا یا آنچه توسط فلش‌ها در شکل رسم شده‌اند، این دنباله به دسته‌هایی تقسیم شده که در هر دسته $|p|+q$ ثابت است. بنابراین به ازای همه n ها، دسته‌ها براساس $|p|+q=n$ مرتب شده‌اند. به ازای $n=1, 2, 3, \dots$ یک دنباله نامتناهی به دست می‌آید و به این ترتیب تمام عددهای گویا شمرده می‌شوند.